

**ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN PECANDU  
NARKOBA SINTETIS DENGAN TINGKAT KEJADIAN  
UMUM**

**SKRIPSI**

oleh

**EKA YULIANSYAH**

**145090400111027**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**JURUSAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**

**MALANG**

**2018**

**ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN PECANDU  
NARKOBA SINTETIS DENGAN TINGKAT KEJADIAN UMUM**

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat memperoleh gelar  
Sarjana Matematika

oleh  
**EKA YULIANSYAH**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
2018**



**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI****ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN PECANDU  
NARKOBA SINTETIS DENGAN TINGKAT KEJADIAN UMUM**

oleh  
**EKA YULIANSYAH**  
**145090400111027**

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji  
pada tanggal 23 Juli 2018  
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Matematika**

**Pembimbing**

**Dra. Trisilowati, M.Sc, PhD**  
**NIP. 196309261989032001**

**Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika  
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D**  
**NIP. 197509082000031003**



**LEMBAR PERNYATAAN**

**Saya yang bertanda tangan di bawah ini**

**Nama : Eka Yuliansyah**  
**NIM : 145090400111027**  
**Jurusan : Matematika**  
**Penulis skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model Penyebaran  
Pecandu Narkoba Sintetis dengan  
Tingkat Kejadian Umum**

**dengan ini menyatakan bahwa:**

- 1. Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.**
- 2. Apabila di kemudian hari skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.**

**Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.**

**Malang, 9 Juli 2018**  
**yang menyatakan,**

**Eka Yuliansyah**  
**NIM. 145090400111027**



# ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN PECANDU NARKOBA SINTETIS DENGAN TINGKAT KEJADIAN UMUM

## ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas kontruksi dan analisis model penyebaran pecandu narkoba sintetis dengan tingkat kejadian umum. Analisis dinamik dilakukan untuk menentukan titik kesetimbangan, syarat eksistensi titik kesetimbangan, penentuan angka reproduksi dasar  $R_0$ , kestabilan lokal dan global titik kesetimbangan. Hasil analisis dinamik menunjukkan bahwa model memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas pecandu dan titik kesetimbangan endemik pecandu. Titik kesetimbangan bebas pecandu eksis tanpa syarat dan bersifat stabil asimtotik global jika angka reproduksi dasar  $R_0 < 1$ , sedangkan titik kesetimbangan endemik eksis jika  $R_0 > 1$  dan bersifat stabil asimtotik global. Simulasi numerik dilakukan untuk mendukung hasil analisis.

**Kata kunci :** narkoba sintetis, angka reproduksi dasar, analisis kestabilan





repository.ub.ac.id

# DYNAMICAL ANALYSIS OF TRANSMISSION MODELS SYNTHETIC DRUG ADDICTS WITH GENERAL INCIDENCE RATE

## ABSTRACT

This final project discusses construction and dynamical analysis of transmission model synthetic drug addicts with a general incidence rate. Dynamical analysis is conducted to determine the equilibrium point, existence condition of equilibrium point, local and global stability of the equilibrium point. Analysis results show that the model has two equilibrium points namely drugs-free addict equilibrium point and endemic drug addict equilibrium point. Drugs-free addict equilibrium point exists without condition and it is globally asymptotically stable if the basic reproduction number  $R_0 < 1$ . On the other hand the endemic drug addict equilibrium point exists if  $R_0 > 1$  and it is globally asymptotically stable. Numerical simulations are conducted to support the dynamic analysis results.

**Keywords:** synthetic drugs, basic reproduction number, stability analysis.



## KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Analisis Dinamik Model Penyebaran Pecandu Narkoba Sintetis dengan Tingkat Kejadian Umum dengan baik dan lancar. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Rasulullah SAW sebagai suri teladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Dra. Trisilowati, M.Sc, PhD. selaku dosen pembimbing skripsi atas segala bimbingan, motivasi, dan saran yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan benar.
2. Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Ummu Habibah, S.Si.,M.Si.,Ph.D selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
4. Drs. Bambang Sugandi, M.Si selaku dosen penasihat akademik atas segala bimbingan, motivasi, dan saran yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan benar.
5. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika, Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
6. Ayah (Heri Mulyono), Ibu (Supami), adik (Intan Amalia Sari) dan seluruh keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberi dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Ardhi Sanjaya, Imron Mashuri, Hanesty Astinov Cimi dan Miftahul Firdaus atas ilmu, kritik, dan saran dalam penulisan skripsi ini.

- repository.ub.ac.id
8. Keluarga Besar Matematika 2014 atas kebersamaan selama menikmati proses perkuliahan.
  9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Kritik dan saran dapat dikirim melalui email [ekajulian97@gmail.com](mailto:ekajulian97@gmail.com), untuk perbaikan dimasa yang akan datang. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 9 Juli 2018

Penulis



## DAFTAR ISI

JUDUL	Halaman
<b>LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI</b>	<b>iii</b>
<b>LEMBAR PERNYATAAN</b>	<b>v</b>
<b>ABSTRAK</b>	<b>vii</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>ix</b>
<b>KATA PENGANTAR</b>	<b>xi</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xv</b>
<b>DAFTAR TABEL</b>	<b>xvii</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b>	<b>xix</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	1
1.3 Tujuan.....	3
<b>BAB II DASAR TEORI</b>	<b>5</b>
2.1 Sistem Dinamik .....	5
2.1.1 Sistem Otonomus.....	5
2.1.2 Sistem Otonomus Linier.....	6
2.1.3 Kriteria Routh-Hurwitz .....	7
2.1.4 Sistem Otonomus Nonlinier .....	9
2.1.5 Kestabilan Global dengan Fungsi Lyapunov.....	11
2.2 Angka Reproduksi Dasar .....	11
2.3 Metode Matriks Generasi Selanjutnya .....	12
2.4 Tingkat Kejadian .....	14
<b>BAB III PEMBAHASAN</b>	<b>15</b>
3.1 Kontruksi Model.....	15

3.1.1 Laju perubahan subpopulasi individu rentan .....	16
3.1.2 Laju perubahan subpopulasi pecandu psikologis .....	16
3.1.3 Laju perubahan subpopulasi pecandu fisiologis .....	17
3.1.4 Laju perubahan subpopulasi pecandu dalam rehabilitasi.....	17
3.2 Titik Keseimbangan.....	19
3.3 Angka Reproduksi Dasar .....	20
3.4 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan.....	23
3.4.1 Analisis kestabilan lokal bebas pecandu .....	23
3.4.2 Analisis kestabilan lokal endemik pecandu .....	24
3.4.3 Analisis kestabilan global pecandu .....	25
3.4.4 Analisis kestabilan global endemik pecandu .....	26
3.5 Simulasi Numerik dan Interpretasi Hasil Analisis.....	31
3.5.1 Simulasi I .....	31
3.5.2 Simulasi II.....	33
<b>BAB IV KESIMPULAN</b>	<b>37</b>
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>39</b>

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 Diagram kompartemen penyebaran pecandu narkoba sintetis dengan tingkat kejadian umum .....	15
Gambar 3.2 Potret fase sistem (3.7) dengan tingkat kejadian $\beta$ untuk $R_0 < 1$ .....	32
Gambar 3.3 Potret fase sistem (3.7) dengan tingkat kejadian $\beta$ untuk $R_0 > 1$ .....	33
Gambar 3.4 Potret fase sistem (3.7) dengan tingkat kejadian $\frac{\beta}{N}$ untuk $R_0 < 1$ .....	34
Gambar 3.5 Potret fase sistem (3.7) dengan tingkat kejadian $\frac{\beta}{N}$ untuk $R_0 > 1$ .....	35







DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Titik kesetimbangan, syarat eksistensi, dan kestabilan ..... 30

Tabel 3.2 Nilai parameter ..... 31





## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Perhitungan titik kesetimbangan endemik pecandu .....	41
Lampiran 2. Perhitungan kestabilan global bebas pecandu .....	47
Lampiran 3. Perhitungan kestabilan global endemik pecandu. ....	49





# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Narkoba adalah singkatan dari narkotika dan obat/bahan berbahaya. Selain narkoba, istilah yang diperkenalkan khusus oleh Departemen Kesehatan Republik Indonesia adalah napza yang merupakan singkatan dari narkotika psikotropika dan zat adiktif. Semua istilah ini baik narkoba atau napza mengacu pada sekelompok zat yang umumnya mempunyai resiko kecanduan bagi penggunaanya. Menurut para ahli kesehatan, narkoba sebenarnya adalah psikotropika yang biasa dipakai untuk membius pasien saat hendak di operasi atau obat-obatan untuk penyakit tertentu. Namun kini presepsi itu disalahgunakan akibat pemakaian yang telah di luar dosis. Hingga kini penyebaran narkoba sudah hampir menyeluruh ke penduduk dunia karena mudah diperoleh dari oknum-oknum yang tidak bertanggung jawab. Narkoba sendiri terbagi atas dua jenis, yaitu narkoba alami dan narkoba sintetis. Keduanya sama-sama membahayakan jika disalahgunakan. Jenis narkoba alami berasal dari tumbuhan-tumbuhan, diantaranya adalah kokain, ganja, opium, dan morfin, sedangkan narkoba sintetis berasal dari bahan kimia.

Narkoba sintetis juga disebut “obat klub” karena banyak beredar ditempat-tempat hiburan malam. Jenis narkoba ini sedang naik daun dikalangan kaum muda karena mudah didapatkan dan desain kemasannya sangat menarik. Narkoba ini secara langsung dapat mempengaruhi sistem saraf pusat otak, tidak hanya itu ginjal dan jantung juga tak luput diserang. Narkoba sintetis yang paling umum adalah metamfetamin, naltrexon, dan triazolam, sedangkan yang baru-baru ini muncul adalah ganja sintetis (*Synthetic Cannabinoid*) dan tembakau cap gorilla. Narkoba jenis baru ini menyebabkan ketergantungan psikologis yang lebih kuat daripada narkoba alami, sehingga mengakibatkan kecanduan yang berlebih. Bila seseorang mengkonsumsi narkoba sintetis, akan segera muncul gejala psikotik seperti kegembiraan, depresi, halusinasi dan sebagainya. Hal ini mengakibatkan perilaku pengguna diluar kendali yang bisa menimbulkan serangkaian

masalah sosial seperti kejahatan dan kekerasan serius. Besaran statistik jumlah kasus penyalahgunaan narkoba di dunia diestimasi sebesar 4,9% atau 208 juta pengguna di tahun 2006 kemudian mengalami sedikit penurunan pada tahun 2008 dan 2009 menjadi 4,6% dan 4,8%. Namun kemudian meningkat kembali menjadi 5,2% di tahun 2011 dan tetap stabil hingga 2013. Secara absolut, diperkirakan ada sekitar 167 hingga 315 juta orang penyalahguna dari populasi penduduk dunia yang berumur 15-64 tahun yang menggunakan narkoba minimal sekali dalam setahun di tahun 2013 (UNODC, 2015), sehingga perlu dilakukan tindakan untuk mengendalikan penyebaran narkoba sintetis saat ini.

Banyak peneliti yang telah mempelajari model matematika sebagai dasar teoritis untuk mencegah dan mengendalikan penyebaran pecandu narkoba. Comiskey, dkk. (2007) membahas model penyebaran heroin dan pengobatan pecandu heroin dalam bentuk persamaan differensial biasa. Mulone, dkk. (2009) meneliti model pecandu heroin yang telah direhabilitasi dengan tingkat kejadian standar. Kemudian Fang, dkk. (2014) membahas model heroin nonotonomus dengan waktu tunda dan membuktikan titik kesetimbangannya stabil asimtotik global menggunakan fungsi Lyapunov. Selain itu, Nyabadza, dkk. (2015) meneliti model heroin sederhana yang terbagi menjadi populasi rentan, pecandu tanpa pengobatan, pecandu dalam perawatan, dan pengguna berulang-ulang. Semua model tersebut secara umum membahas narkoba tradisional atau alami. Mingju, dkk. (2017) melakukan pengembangan model transmisi narkoba sintetis. Pada model ini populasi dibagi menjadi 4, yaitu populasi rentan (*Susceptible*), populasi pecandu dalam gejala psikologis (*Psychological Addicts*), populasi pecandu dalam gejala fisiologis (*Physiological Addicts*, dan populasi pecandu yang direhabilitasi (*drug-users in Treatment*).

Pada skripsi ini dibahas analisis dinamik model penyebaran narkoba sintetis yang mengkaji ulang artikel Ma, dkk. (2017). Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, analisis kestabilan lokal, dan kestabilan global titik kesetimbangan. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta untuk mendukung hasil analisis.

## 1.2 Rumusan masalah

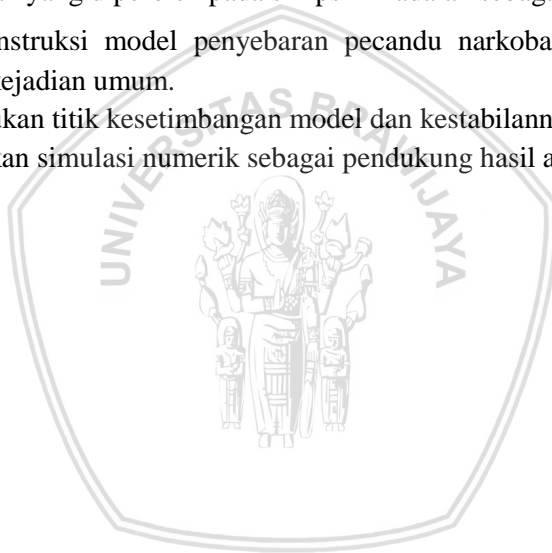
Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, inti permasalahan yang dikaji pada skripsi ini sebagai berikut

1. Bagaimana mengkonstruksi model penyebaran pecandu narkoba sintetis dengan tingkat kejadian umum?
2. Bagaimana titik kesetimbangan dan kestabilannya?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik model?

## 1.3 Tujuan

Tujuan yang diperoleh pada skripsi ini adalah sebagai berikut

1. Mengkonstruksi model penyebaran pecandu narkoba sintetis dengan tingkat kejadian umum.
2. Menentukan titik kesetimbangan model dan kestabilannya.
3. Melakukan simulasi numerik sebagai pendukung hasil analisis.







## BAB II

### DASAR TEORI

Dalam skripsi ini dibahas analisis dinamik model penyebaran obat sintetis dengan tingkat kejadian umum. Sistem dinamik linear dan nonlinear, titik kesetimbangan, kriteria Routh-Hurwitz, kestabilan lokal, kestabilan global, serta matriks generasi selanjutnya untuk mencari angka reproduksi dasar merupakan beberapa teori yang digunakan untuk membantu memahami persoalan yang dibahas dalam skripsi ini.

#### 2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya pada masa yang akan datang jika diberikan suatu kondisi di masa sekarang atau masa lalu. Dalam penerapannya, sistem dinamik dibagi menjadi dua yaitu sistem dinamik diskrit dan sistem dinamik kontinu. Sistem dinamik diskrit dinyatakan sebagai persamaan beda, secara umum dapat dituliskan

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Sistem dinamik kontinu dinyatakan sebagai persamaan diferensial biasa, secara umum dapat dituliskan

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

(Alligood, dkk., 2000)

Sistem dinamik kontinu dapat dibedakan menjadi sistem otonomus dan sistem nonotonomus. Dalam skripsi ini model yang dibahas merupakan sistem otonomus.

##### 2.1.1 Sistem Otonomus

Sistem otonomus adalah suatu sistem persamaan diferensial biasa yang berbentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

dengan fungsi  $\vec{f}(\vec{x})$  adalah fungsi kontinu yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas  $t$ .

### Definisi 2.1.1 (Titik Keseimbangan Sistem Otonomus)

Titik  $\vec{x}^*$  disebut titik kritis sistem otonomus (2.1) jika memenuhi  $\vec{f}(\vec{x}) = 0$ . Titik kritis  $\vec{x}^*$  merupakan solusi sistem persamaan (2.1) yang bernilai konstan, karena  $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$ . Keadaan yang menyebabkan  $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$  disebut keadaan setimbang dan titik kritis adalah titik yang memenuhinya, sehingga titik kritis disebut sebagai titik keseimbangan.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

### Definisi 2.1.2 (Kestabilan Titik Keseimbangan)

Titik keseimbangan  $\vec{x}^*$  sistem otonomus (2.1) dikatakan

1. Stabil, jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $\delta > 0$  sedemikian sehingga untuk setiap solusi  $\vec{x}(t)$  sistem (2.1) yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta,$$

ada untuk setiap  $t > 0$  dan memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

2. Stabil asimtotik, jika  $\vec{x}^*$  stabil dan terdapat  $\delta_0 > 0$  sedemikian sehingga jika suatu solusi  $\vec{x}(t)$  sistem (2.1) yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0,$$

akan berlaku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*.$$

3. Tidak stabil, apabila tidak memenuhi kriteria stabil.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

### 2.1.2 Sistem Otonomus linear

Secara umum sistem otonomus linear dengan  $n$  persamaan dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \quad (2.2)$$

dengan  $a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, \dots, n$ . Sistem persamaan (2.2) dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad (2.3)$$

dengan  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$  matriks konstan.

Misalkan  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ , adalah nilai eigen matriks  $A$  dan  $\det(A) \neq 0$ , maka  $\vec{x}^* = \vec{0}$  adalah satu-satunya titik kesetimbangan (2.2). Untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.2) dapat digunakan Teorema 2.1.2.

### **Teorema 2.1.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Otonomus Linear.**

Misalkan  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ , adalah nilai eigen matriks koefisien  $A$  sistem otonomus linear (2.2) dengan  $|A| \neq 0$ . Titik kesetimbangan  $\vec{x}^* = \vec{0}$  sistem (2.2) bersifat:

1. stabil, jika semua nilai eigen memiliki bagian real tak positif,
  2. stabil asimtotik, jika semua nilai eigen memiliki bagian real negatif,
  3. tidak stabil, jika terdapat nilai eigen yang memiliki bagian real positif
- (Finizio dan Ladas, 1982).

### **2.1.3 Kriteria Routh-Hurwitz**

Kestabilan titik kesetimbangan sistem linear bergantung pada tanda akar persamaan karakteristik atau nilai eigen matriks koefisiennya. Jika suatu sistem linear berderajat  $n$  mempunyai persamaan karakteristik

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n = 0, \quad (2.4)$$

dengan  $a_n \neq 0$ , maka titik kesetimbangan pada sistem tersebut bersifat stabil asimtotik jika akar-akar persamaan karakteristiknya memiliki bagian real negatif. Dalam beberapa kasus tertentu, tidak mudah untuk menentukan akar-akar persamaan (2.4). Salah satu cara mengetahui kestabilan titik

kesetimbangan tanpa harus menentukan akar-akar persamaan karakteristiknya dengan memanfaatkan kriteria Routh Hurwitz.

Akar-akar persamaan karakteristik (2.4) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika

$$D_1 = |a_1| > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0, \quad D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2n-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2n-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & a_{2n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{vmatrix} > 0,$$

dengan  $k = 1, 2, \dots, n$ . Misalkan diberikan persamaan karakteristik berderajat empat

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \quad (2.5)$$

Akar-akar persamaan (2.5) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika

$$1. \quad D_1 = |a_1| = a_1 > 0,$$

$$2. \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 > 0,$$

$$3. \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2a_4 > 0,$$

$$4. \quad D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3a_4 - a_3^2a_4 - a_1^2a_4 > 0,$$

sehingga  $a_4 > 0$ .

(Murray, 2002)

### 2.1.4 Sistem Otonomus Nonlinear

Perhatikan sistem otonomus nonlinear berdimensi  $n$  berikut.

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\vec{x}), i = 1, \dots, n, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.6)$$

dengan fungsi  $f_i$  memiliki turunan parsial yang kontinu di titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$ . Sistem (2.6) dapat didekati oleh sistem otonomus linear dengan cara melakukan ekspansi Taylor fungsi  $f_i$  di sekitar titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$ , sehingga fungsi  $f_i$  dapat dinyatakan sebagai

$$f_i(\vec{x}) = f_i(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*) + \eta_i(\vec{x}), \quad (2.7)$$

dengan  $\eta_i(\vec{x})$  adalah suku sisa untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ . Suku sisa pada hampiran orde satu terhadap  $f_i$  memenuhi sifat

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta_i(\vec{x})}{\|\vec{p}\|} = 0,$$

dengan  $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$  dimana  $p_i = x_i - x_i^*$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Selanjutnya dengan menerapkan  $\frac{dx_i}{dt} = \frac{dp_i}{dt}$  pada sistem (2.6) maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^*) \\ f_2(\vec{x}^*) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^*) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

karena  $f_i(\vec{x}^*) = 0$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ . maka persamaan (2.8) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{pmatrix}.$$

Jika  $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ , maka persamaan (2.8) dapat

ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = J\vec{p} + \vec{\eta}, \quad (2.9)$$

dengan  $J$  disebut matriks Jacobi. Jika  $\vec{x}$  berada dekat dengan  $\vec{x}^*$ , maka  $\vec{\eta}$  bernilai kecil, sehingga  $\vec{\eta} \rightarrow \vec{0}$ . Oleh karena itu,  $\vec{\eta}$  dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.6) dapat dihamperi oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = J\vec{p}. \quad (2.10)$$

Jika  $\vec{x} = \vec{x}^*$ , maka diperoleh  $\vec{p} = \vec{0}$  sehingga sistem linear (2.10) memiliki titik kesetimbangan  $\vec{p} = \vec{0}$  dan  $J$  berperan sebagai  $A$  pada sistem otonomus linear (2.3). Proses penghampiran sistem nonlinear oleh sistem linear dinamakan proses linearisasi. Selanjutnya kestabilan titik kesetimbangan sistem nonlinear (2.6) akan bergantung pada kestabilan titik kesetimbangan hasil linearisasi seperti dinyatakan pada Teorema 2.1.2.

### **Teorema 2.1.4 Kestabilan Titik Keseimbangan Sistem Otonomus Nonlinear.**

Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear bersifat,

1. stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi (2.10) bersifat stabil asimtotik,

2. tidak stabil, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi (2.10) bersifat tidak stabil.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

### 2.1.5 Kestabilan Global dengan Fungsi Lyapunov

Kestabilan titik kesetimbangan dibedakan menjadi kestabilan lokal dan global. Kestabilan lokal titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear (2.6) dapat ditentukan dengan melakukan linearisasi seperti yang dijelaskan pada subbab 2.1.4. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menentukan kestabilan global titik kesetimbangan adalah dengan menggunakan fungsi Lyapunov.

#### Definisi 2.1.5.1 Fungsi Lyapunov Lemah

Misalkan  $\vec{x}^*$  adalah suatu titik kesetimbangan sistem persamaan (2.1). Suatu  $L : R^n \rightarrow R$  disebut fungsi Lyapunov lemah untuk  $\vec{x}^*$  jika terdapat suatu persekitaran  $W \subseteq R^n$  dari  $\vec{x}^*$  yang memenuhi kondisi,

1.  $L(\vec{x}^*) = 0$  dan  $L(\vec{x}) > 0 \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$ ,
2.  $L'(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in W$ .

#### Definisi 2.1.5.2 Fungsi Lyapunov Kuat.

Fungsi  $L$  disebut fungsi Lyapunov kuat untuk  $\vec{x}^*$  jika terdapat suatu persekitaran  $W$  pada  $\vec{x}^*$  yang memenuhi kondisi,

1.  $L(\vec{x}^*) = 0$  dan  $L(\vec{x}) > 0 \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$ ,
2.  $L'(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^*, \vec{x} \in W$ .

#### Teorema 2.1.5 (Kestabilan global dengan fungsi Lyapunov)

Misalkan  $\vec{x}^*$  adalah suatu titik kesetimbangan sistem persamaan (2.1). Titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$  bersifat,

1. stabil global, jika terdapat suatu fungsi Lyapunov lemah untuk  $\vec{x}^*$ ,
2. stabil asimtotik global, jika terdapat suatu fungsi Lyapunov kuat untuk  $\vec{x}^*$ .

(Alligood, dkk., 2000)

## 2.2 Angka Reproduksi Dasar

Angka reproduksi dasar dinotasikan dengan  $R_0$  merupakan suatu ukuran potensi penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai nilai harapan banyaknya populasi



rentan yang menjadi terinfeksi selama masa infeksi berlangsung. Pada model epidemi penyebaran penyakit, angka reproduksi dasar digunakan sebagai penentu untuk mengetahui apakah dalam suatu populasi terjadi suatu penyebaran penyakit atau tidak. Angka reproduksi dasar menyatakan rata-rata banyaknya individu yang terinfeksi akibat satu individu yang telah terinfeksi sebelumnya. Penyebaran penyakit terjadi jika  $R_0 > 1$  karena rata-rata satu individu terinfeksi menyebabkan lebih dari satu individu baru terinfeksi. Jika  $R_0 < 1$  maka penyebaran penyakit tidak terjadi karena rata-rata satu individu terinfeksi menyebabkan kurang dari satu individu baru terinfeksi, dengan kata lain individu tersebut belum tentu dapat menginfeksi individu lainnya.

(Driessche dan Watmough, 2001)

## 2.3 Metode Matrik Generasi Selanjutnya

Metode matriks generasi selanjutnya adalah suatu metode yang digunakan untuk menentukan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ). Langkah awal pada metode ini adalah membagi model kompartemen penyebaran penyakit menjadi dua yaitu kompartemen terinfeksi dan kompartemen tidak terinfeksi. Jika terdapat individu-individu terinfeksi maka suatu kompartemen disebut kompartemen terinfeksi. Misalkan terdapat  $1, \dots, m, m+1, \dots, n$  kompartemen dengan kompartemen pertama sampai dengan  $m$  memuat individu terinfeksi dan kompartemen  $m+1$  sampai dengan  $n$  memuat individu tidak terinfeksi. Model kompartemen yang memuat individu terinfeksi dapat dituliskan sebagai berikut

$$x'_i = \mathcal{F}_i - \mathcal{V}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

dengan  $x_i$  menyatakan jumlah individu pada setiap kompartemen  $i$ .  $\mathcal{F}_i$  menyatakan komponen pembentuk matriks  $\mathcal{F}$  yang merupakan infeksi baru yang masuk pada kompartemen ke- $i$ . Infeksi baru hanya dapat diperoleh dari individu rentan dan  $\mathcal{F}_i$  tidak boleh negatif.  $\mathcal{V}_i$  menyatakan komponen pembentuk matriks  $\mathcal{V}$  yang merupakan transfer keluar atau masuk dari kompartemen satu ke kompartemen lainnya.  $\mathcal{V}_i$  bernilai positif jika menyatakan transfer keluar dari matriks ke- $i$ , dan  $\mathcal{V}_i$  bernilai negatif jika transfer masuk pada suatu kompartemen.

Didefinisikan  $D\mathcal{F}$  dan  $D\mathcal{V}$  adalah matriks  $m \times m$  sebagai berikut

$$D\mathcal{F} = \left[ \frac{\partial \mathcal{F}_i(P_0)}{\partial x_j} \right], D\mathcal{V} = \left[ \frac{\partial \mathcal{V}_i(P_0)}{\partial x_j} \right], \quad i, j = 1, \dots, m$$

dengan  $P_0$  merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit. Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai berikut

$$K = (D\mathcal{F})(D\mathcal{V})^{-1}.$$

Angka reproduksi dasar diperoleh dari perhitungan matriks generasi selanjutnya, yaitu

$$R_0 = \rho(K),$$

dengan  $\rho(K)$  adalah *spectral radius* matriks  $K$ .

(Brauer dan Chaves, 2012)

Contoh: Diberikan model yang terdiri dari tiga persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu - \beta SI - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - kI - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} &= kI - \mu R. \end{aligned}$$

Sistem persamaan ini mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit  $\varepsilon_0 = (1,0,0)$ . Matriks  $\mathcal{F}$  dan  $\mathcal{V}$  dapat dituliskan sebagai berikut

$$\mathcal{F} = [\beta SI] \text{ dan } \mathcal{V} = [kI + \mu I].$$

Dengan penurunan terhadap masing-masing subpopulasi dan mensubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit  $\varepsilon_0 = (1,0,0)$  maka diperoleh

$$D\mathcal{F}(\varepsilon_0) = [\beta] \text{ dan } D\mathcal{V}(\varepsilon_0) = [k + \mu].$$

Sebelum menentukan matriks generasi selanjutnya, terlebih dahulu ditentukan invers matriks, yaitu

$$D\mathcal{V}^{-1}(\varepsilon_0) = \left[ \frac{1}{(k + \mu)} \right].$$

Perkalian matriks  $D\mathcal{F}(\varepsilon_0)$  dan  $D\mathcal{V}^{-1}(\varepsilon_0)$  menghasilkan  $K$ , kemudian dibentuk matriks generasi selanjutnya  $K = (D\mathcal{F}(\varepsilon_0))(D\mathcal{V}^{-1}(\varepsilon_0))$ , yaitu

$$K = \left[ \frac{\beta}{(k + \mu)} \right].$$

Selanjutnya ditentukan nilai eigen dari matriks  $K$ , yaitu  $|K - \lambda I| = 0$  dan diperoleh akar karakteristik sebagai berikut

$$\lambda = \frac{\beta}{(k + \mu)}.$$

Angka reproduksi dasar  $R_0$  adalah spectral radius dari matriks  $K$ , yaitu

$$\begin{aligned} R_0 &= \rho(K) = \max\{\lambda\}, \\ &= \max\left\{\frac{\beta}{(k + \mu)}\right\}. \end{aligned}$$

Dengan demikian  $R_0$  adalah

$$R_0 = \frac{\beta}{(k + \mu)}.$$

## 2.4 Tingkat Kejadian

Tingkat kejadian pada model epidemi merupakan fungsi yang menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi akibat kontak langsung dengan individu terinfeksi. Jika unit waktu yang digunakan adalah perhari, maka  $\beta$  adalah rata-rata banyaknya kontak perhari dengan individu dari kelas terinfeksi.

Terdapat beberapa jenis tingkat kejadian yaitu

1. *Billinier* dengan bentuk fungsi  $\beta I$ .
2. *Standard* dengan bentuk fungsi  $\frac{\beta I}{N}$ .
3. *Tersaturasi* dengan bentuk fungsi  $\frac{\beta I}{1 + aI}$ .
4. *Nonmonoton* dengan bentuk fungsi  $\frac{\beta I}{1 + aI^2}$ .
5. *Umum* dengan bentuk fungsi  $f(I, N)$ .

Tingkat kejadian umum mewakili semua jenis tingkat kejadian.

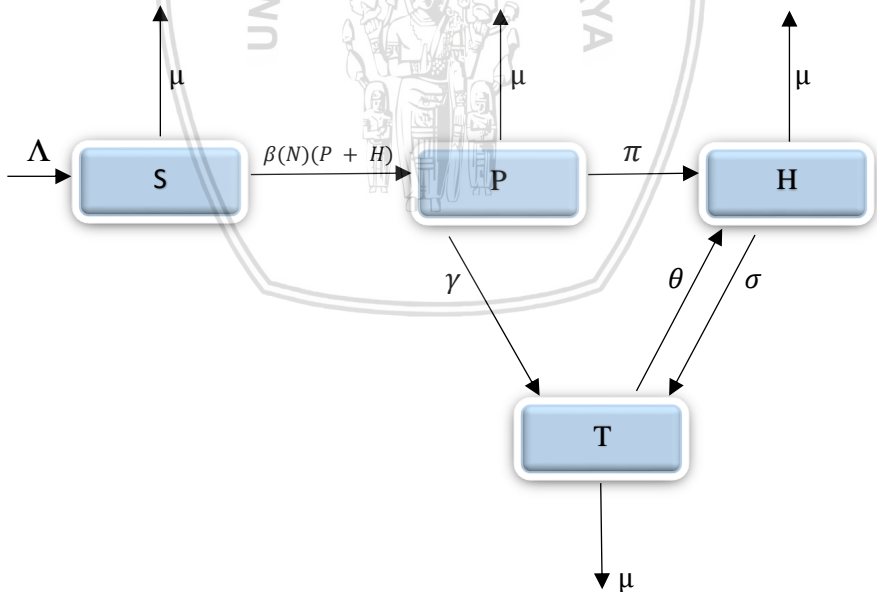
## BAB III

### PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas konstruksi model penyebaran pecandu narkoba sintetis dengan tingkat kejadian umum. Selanjutnya dilakukan analisis dinamik pada model yang meliputi penentuan titik kesetimbangan, syarat eksistensi titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, analisis kestabilan lokal, dan global titik kesetimbangan. Pada bagian akhir dilakukan beberapa simulasi numerik untuk mengilustrasikan hasil analisis yang telah diperoleh.

#### 3.1 KONSTRUKSI MODEL

Populasi model penyebaran pecandu narkoba sintetis dengan tingkat kejadian umum dibagi menjadi 4 subpopulasi. Populasi rentan ( $S$ ), populasi pecandu psikologis ( $P$ ), populasi pecandu fisiologis ( $H$ ), dan populasi pecandu yang direhabilitasi ( $T$ ). Model transmisi narkoba sintetis dengan tingkat kejadian umum digambarkan dalam diagram kompartemen pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1. Diagram kompartemen model penyebaran pecandu narkoba sintetis dengan tingkat kejadian umum.

Model penyebaran pecandu narkoba sintetis diperoleh dengan mendeskripsikan diagram kompartemen pada Gambar 3.1 ke dalam model matematika. Terdapat tujuh parameter yang mempengaruhi laju perubahan masing-masing subpopulasi, yaitu  $\Lambda$ ,  $\beta(N)$ ,  $\pi$ ,  $\gamma$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$ ,  $\mu$ . Parameter  $\Lambda$  menginterpretasikan laju kelahiran,  $\beta(N)$  menunjukkan tingkat kejadian umum laju populasi rentan yang mulai terserang infeksi (pecandu),  $\pi$  adalah laju pecandu psikologis yang berpindah menjadi pecandu fisiologis,  $\gamma$  merupakan laju pecandu psikologis yang masuk rehabilitasi,  $\theta$  menginterpretasikan laju pecandu fisiologis yang masuk rehabilitasi,  $\sigma$  menunjukkan laju pecandu yang lolos dari rehabilitasi dan masih menggunakan narkoba sintetis, dan  $\mu$  mewakili laju kematian alami. Konstruksi model penyebaran pecandu narkoba sintetis dijelaskan secara rinci berikut ini.

### 3.1.1 Laju Perubahan Subpopulasi Individu Rentan ( $S$ )

Berdasarkan Gambar 3.1 perubahan jumlah individu pada subpopulasi rentan ( $S$ ) dipengaruhi oleh kelahiran, perubahan individu rentan menjadi individu terinfeksi, dan kematian alami. Individu yang baru lahir akan masuk ke dalam subpopulasi rentan, sehingga mengakibatkan bertambahnya jumlah individu pada subpopulasi rentan dengan laju sebesar  $\Lambda$ . Laju perubahan populasi rentan pada waktu  $t$  berkurang karena adanya kontak dengan pecandu psikologi dan pecandu fisiologi yang dinotasikan  $-\beta(N)S(P + H)$ , serta mengalami kematian alami yaitu  $\mu S$ . Dengan demikian, laju perubahan populasi rentan persatuan waktu adalah

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S - \beta(N)S(P + H). \quad (3.1)$$

### 3.1.2 Laju Perubahan Subpopulasi Pecandu Psikologis ( $P$ )

Interaksi antara individu rentan dengan pecandu psikologis dan fisiologis menyebabkan bertambahnya subpopulasi pecandu psikologis, individu rentan masuk ke subpopulasi pecandu psikologis karena terpengaruhi atau terganggu kejiwaannya (labil). Laju perubahan pecandu psikologis pada waktu  $t$  berbanding lurus dengan bertambahnya jumlah pecandu psikologis yang dinyatakan sebagai  $\beta(N)S(P + H)$ .

Berkurangnya jumlah subpopulasi pecandu psikologis karena ketergantungan dalam memakai narkoba, sehingga masuk ke dalam pecandu psikologis dengan laju perubahan tersebut dinyatakan sebagai  $-\pi P$ . Laju berkurangnya pecandu psikologis juga diakibatkan kematian alami serta pecandu memasuki rehabilitasi sebagai tahap penyembuhan, laju tersebut dinyatakan sebagai  $-(\mu + \gamma)P$ . Dengan demikian, laju perubahan populasi pecandu psikologis persatuan waktu adalah

$$\frac{dP}{dt} = \beta(N)S(P + H) - \pi P - (\mu + \gamma)P. \quad (3.2)$$

### 3.1.3 Laju Perubahan Subpopulasi Pecandu Fisiologis ( $H$ )

Perubahan subpopulasi pecandu psikologis menjadi subpopulasi pecandu fisiologis dipengaruhi oleh penggunaan narkoba sintetis yang terus menerus. Pecandu psikologis dapat berubah menjadi pecandu fisiologi dengan laju  $\pi P$ . Laju berkurangnya subpopulasi pecandu fisiologis diakibatkan kematian alami serta pecandu memasuki rehabilitasi sebagai tahap penyembuhan, laju tersebut dinyatakan sebagai  $-\sigma H - \mu H$ .

Subpopulasi pecandu fisiologis juga bertambah dikarenakan pecandu yang telah direhabilitasi masih tetap saja mengulangi perbuatan konsumsi narkoba sintetis, laju bertambahnya subpopulasi pecandu fisiologis setelah direhabilitasi dinyatakan sebagai  $\theta T$ .

Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi pecandu fisiologis persatuan waktu adalah

$$\frac{dH}{dt} = \pi P + \theta T - \sigma H - \mu H. \quad (3.3)$$

### 3.1.4 Laju Perubahan Subpopulasi Pecandu dalam Rehabilitasi ( $T$ )

Laju subpopulasi rehabilitasi/penyembuhan mengalami pertambahan dari subpopulasi pecandu psikologis dan pecandu fisiologis. Masing-masing laju dinyatakan dalam bentuk  $\gamma P$  mewakili subpopulasi pecandu psikologis dan  $\sigma H$  mewakili subpopulasi pecandu fisiologi.

Laju berkurangnya subpopulasi rehabilitasi dikarenakan adanya pecandu yang kambuh dan masih mengkonsumsi narkoba sehingga pecandu tersebut masuk ke subpopulasi pecandu fisiologis, laju berkurangnya

subpopulasi rehabilitasi tersebut adalah  $-\theta T$ . Adapun hal lain yang mempengaruhi laju berkurangnya subpopulasi rehabilitasi adalah kematian alami yang dinyatakan sebagai  $-\mu T$ .

Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi pecandu rehabilitasi/ penyembuhan persatuan waktu adalah

$$\frac{dT}{dt} = \gamma P + \sigma H - \theta T - \mu T. \quad (3.4)$$

Berdasarkan uraian tersebut, model berbentuk persamaan diferensial nonlinier sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \mu S - \beta(N)S(P + H), \\ \frac{dP}{dt} &= \beta(N)S(P + H) - \pi P - (\mu + \gamma)P, \\ \frac{dH}{dt} &= \pi P + \theta T - \sigma H - \mu H, \\ \frac{dT}{dt} &= \gamma P + \sigma H - \theta T - \mu T, \end{aligned} \quad (3.5)$$

yang terdefinisi pada

$$\Omega = \{(S, P, H, T) | S, P, H, T \geq 0, S + P + H + T = N\}.$$

Selanjutnya dengan menjumlahkan semua persamaan pada sistem (3.5), diperoleh  $\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N$ . Jika  $t \rightarrow \infty$  maka  $N \rightarrow \frac{\Lambda}{\mu}$ . Oleh karena itu pada pembahasan berikutnya jumlah total  $N = \frac{\Lambda}{\mu}$ . Kemudian dengan perubahan variabel  $x = \frac{S}{N}$ ,  $y = \frac{P}{N}$ ,  $z = \frac{H}{N}$ , dan  $w = \frac{T}{N}$  sistem (3.5) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu - \mu x - \beta(N)Nx(y + z), \\ \frac{dy}{dt} &= \beta(N)Nx(y + z) - \pi y - (\mu + \gamma)y, \\ \frac{dz}{dt} &= \pi y + \theta w - (\sigma + \mu)z, \\ \frac{dw}{dt} &= \gamma y + \sigma z - (\theta + \mu)w, \end{aligned} \quad (3.6)$$

dengan kondisi awal

$$x(0) = x_0 \geq 0, y(0) = y_0 \geq 0, z(0) = z_0 \geq 0, w(0) = w_0 \geq 0.$$

### 3.2 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan (3.6) diperoleh ketika

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{dw}{dt} = 0,$$

sehingga diperoleh

$$\mu - \mu x - \beta(N)Nx(y + z) = 0, \quad (3.7a)$$

$$\beta(N)Nx(y + z) - \pi y - (\mu + \gamma)y = 0, \quad (3.7b)$$

$$\pi y + \theta w - (\sigma + \mu)z = 0, \quad (3.7c)$$

$$\gamma y + \sigma z - (\theta + \mu)w = 0. \quad (3.7d)$$

Berdasarkan persamaan (3.7a) sampai (3.7d) dapat diperoleh dua jenis titik keseimbangan, yaitu titik keseimbangan bebas pecandu dan titik keseimbangan endemik pecandu. Titik keseimbangan bebas pecandu diperoleh jika titik  $y = 0$  dan  $z = 0$ , sedangkan titik keseimbangan endemik pecandu diperoleh jika  $y \neq 0$  dan  $z \neq 0$ .

Substitusi  $y = 0$  dan  $z = 0$  ke persamaan (3.7a) menghasilkan

$$\mu - \mu x = 0,$$

$$\mu = \mu x,$$

$$x = 1,$$

sehingga diperoleh titik  $x^0 = 1$ .

Jika titik keseimbangan bebas pecandu dinotasikan  $D_0$ , maka dapat dinyatakan bahwa  $D_0 = (x^0, y^0, z^0, w^0) = (1, 0, 0, 0)$ .  $D_0$  disebut titik keseimbangan bebas pecandu, karena tidak terdapat pecandu pada populasi.

Untuk mendapatkan titik keseimbangan endemik atau terdapat pecandu pada populasi, maka langkah yang dilakukan adalah mengasumsikan parameter pada sistem (3.7) dengan  $m_0 = \mu + \pi + \gamma$ ,  $m_1 = \sigma + \mu$ , dan  $m_2 = \mu + \theta$ . Sistem (3.7) menjadi

$$\mu - \mu x - \beta(N)Nx(y + z) = 0, \quad (3.8a)$$

$$\beta(N)Nx(y + z) - m_0 y = 0, \quad (3.8b)$$

$$\pi y + \theta w - m_1 z = 0, \quad (3.8c)$$

$$\gamma y + \sigma z - m_2 w = 0, \quad (3.8d)$$

kemudian menyelesaikan persamaan (3.8a) sampai (3.8d) jika  $y \neq 0$  dan  $z \neq 0$ , dari (3.8c) dan (3.8d) diperoleh



$$w = \frac{m_1 z - \pi y}{\theta}, \quad (3.9)$$

dan

$$w = \frac{\gamma y + \sigma z}{m_2}. \quad (3.10)$$

Selanjutnya dari persamaan (3.9) dan (3.10) dapat dibentuk

$$\begin{aligned} \frac{m_1 z - \pi y}{\theta} &= \frac{\gamma y + \sigma z}{m_2}, \\ m_1 m_2 z - \sigma \theta z &= \gamma \theta y + \pi m_2 y, \\ (\gamma \theta + \pi m_2) y &= (m_1 m_2 - \sigma \theta) z, \end{aligned}$$

dan diperoleh

$$y^* = \left( \frac{m_1 m_2 - \theta \sigma}{\pi m_2 + \gamma \theta} \right) z^*. \quad (3.11)$$

Dengan menggunakan cara yang sama seperti di atas juga diperoleh

$$w^* = \left( \frac{\pi \sigma - m_1 \gamma}{\pi m_2 + \gamma \theta} \right) z^*. \quad (3.12)$$

Substitusi persamaan (3.11) ke persamaan (3.8a) dengan (3.8b) menghasilkan

$$z^* = \frac{\mu(\pi m_2 + \gamma \theta) \left( \frac{\beta(N)N(m_1 m_2 - \theta \sigma + \pi m_2 + \gamma \theta)}{m_0(m_1 m_2 - \theta \sigma)} - 1 \right)}{\beta(N)N(m_1 m_2 - \theta \sigma + \pi m_2 + \gamma \theta)}. \quad (3.13)$$

Jumlahkan persamaan (3.8a) dengan (3.8b). Substitusikan persamaan (3.11) dan persamaan (3.13) diperoleh

$$x^* = \frac{m_0(m_1 m_2 - \theta \sigma)}{\beta(N)N(m_1 m_2 - \theta \sigma + \pi m_2 + \gamma \theta)}. \quad (3.14)$$

Perhitungan titik kesetimbangan endemik pecandu lebih detail dapat dilihat pada Lampiran 1. Berdasarkan hasil uraian, diperoleh titik kesetimbangan endemik  $D_* = (x^*, y^*, z^*, w^*)$ .

### 3.3 Angka Reproduksi Dasar

Berdasarkan sistem (3.8) dibentuk matriks  $\mathcal{F}$  dan  $\mathcal{V}$  yang terdiri dari subpopulasi individu terinfeksi

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \beta(N)Nx(y+z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \mathcal{V} = \begin{pmatrix} m_0 y \\ -\pi y - \theta w + m_1 z \\ -\gamma y - \sigma z + m_2 w \end{pmatrix}.$$

Matriks Jacobi dari  $\mathcal{F}$  dan  $\mathcal{V}$  adalah

$$D\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \beta(N)Nx & \beta(N)Nx & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } D\mathcal{V} = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & 0 \\ -\pi & m_1 & -\theta \\ -\gamma & -\sigma & m_2 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Kemudian substitusikan nilai titik kesetimbangan bebas pecandu, yaitu  $D_0 = (1,0,0,0)$  ke matriks  $D\mathcal{F}$  dan  $D\mathcal{V}$  pada persamaan (3.15) untuk mendapatkan

$$D\mathcal{F}(D_0) = \begin{pmatrix} \beta(N)N & \beta(N)N & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } D\mathcal{V}(D_0) = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & 0 \\ -\pi & m_1 & -\theta \\ -\gamma & -\sigma & m_2 \end{pmatrix}.$$

Sebelum menentukan matriks generasi selanjutnya, terlebih dahulu mencari invers matriks  $D\mathcal{V}(D_0)$ , yaitu

$$D\mathcal{V}^{-1}(D_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_0} & 0 & 0 \\ \frac{\gamma\theta + m_2\pi}{m_0(m_1m_2 - \sigma\theta)} & \frac{m_2}{m_1m_2 - \sigma\theta} & \frac{\theta}{m_1m_2 - \sigma\theta} \\ \frac{\gamma m_1 + \pi\sigma}{m_0(m_1m_2 - \sigma\theta)} & \frac{\sigma}{m_1m_2 - \sigma\theta} & \frac{m_1}{m_1m_2 - \sigma\theta} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan matriks  $D\mathcal{F}(D_0)$  dan  $D\mathcal{V}^{-1}(D_0)$ , kemudian dibentuk matriks generasi selanjutnya  $K = D\mathcal{F}(D_0)D\mathcal{V}^{-1}(D_0)$  yaitu

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\beta(N)N}{m_0} + \frac{\beta(N)N(\gamma\theta + m_2\pi)}{m_0(m_1m_2 - \sigma\theta)} & \frac{\beta(N)Nm_2}{m_1m_2 - \sigma\theta} & \frac{\beta(N)N\theta}{m_1m_2 - \sigma\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya ditentukan nilai eigen dari matriks  $K$ , dengan menyelesaikan

$$|K - \lambda I| = 0,$$

dan diperoleh akar karakteristik sebagai berikut

$$\lambda_1 = \frac{\beta(N)N(m_1m_2 - \theta\sigma + \pi m_2 + \gamma\theta)}{m_0(m_1m_2 - \theta\sigma)}, \text{ dan } \lambda_{2,3} = 0.$$

Angka reproduksi dasar  $R_0$  adalah *spectral radius* dari matriks  $K$ , yaitu

$$R_0 = \rho(K) = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\},$$

$$= \max\left\{\frac{\beta(N)N(m_1m_2 - \theta\sigma + \pi m_2 + \gamma\theta)}{m_0(m_1m_2 - \theta\sigma)}, 0, 0\right\}.$$

Dengan demikian  $R_0$  adalah

$$R_0 = \frac{\beta(N)N(m_1m_2 - \theta\sigma + \pi m_2 + \gamma\theta)}{m_0(m_1m_2 - \theta\sigma)}.$$

Berdasarkan angka reproduksi dasar, titik kesetimbangan endemik pecandu

$D_* = (x^*, y^*, z^*, w^*)$  eksis jika  $R_0 > 1$ . Titik  $D_* = (x^*, y^*, z^*, w^*)$  menjadi

$$x^* = \frac{m_0(m_1m_2 - \theta\sigma)}{\beta(N)N(m_1m_2 - \theta\sigma + \pi m_2 + \gamma\theta)},$$

$$z^* = \frac{\mu(\pi m_2 + \gamma\theta(R_0 - 1))}{\beta(N)N(m_1m_2 - \theta\sigma + \pi m_2 + \gamma\theta)},$$

$$w^* = \left(\frac{\pi\sigma - m_1\gamma}{\pi m_2 + \gamma\theta}\right)z^*,$$

$$y^* = \left(\frac{m_1m_2 - \theta\sigma}{\pi m_2 + \gamma\theta}\right)z^*.$$

### 3.4 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Analisis kestabilan titik kesetimbangan yang akan ditentukan yaitu analisis kestabilan lokal dan analisis kestabilan global dari masing-masing titik kesetimbangan. Sistem (3.8) merupakan sistem nonlinear, maka kestabilan titik kesetimbangan ditentukan dengan melakukan linearisasi sistem (3.8) di sekitar titik kesetimbangan. Berdasarkan langkah linearisasi pada subbab 2.1.4 diperoleh

$$J = \begin{bmatrix} -\mu - \beta(N)N(y + z) & -\beta(N)Nx & -\beta(N)N & 0 \\ \beta(N)N(y + z) & \beta(N)N - m_0 & \beta(N)N & 0 \\ 0 & \pi & -m_1 & \theta \\ 0 & \gamma & \sigma & -m_2 \end{bmatrix}.$$

### 3.4.1 Analisis Kestabilan Lokal Bebas Pecandu

Matriks Jacobi di titik kesetimbangan  $D_0 = (1,0,0,0)$  adalah

$$J(D_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta(N)N & -\beta(N)N & 0 \\ 0 & \beta(N)N - m_0 & \beta(N)N & 0 \\ 0 & \pi & -m_1 & \theta \\ 0 & \gamma & \sigma & -m_2 \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik matriks  $J(D_0)$  adalah

$$|J(D_0) - \lambda I| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -\beta(N)N & -\beta(N)N & 0 \\ 0 & \beta(N)N - m_0 - \lambda & \beta(N)N & 0 \\ 0 & \pi & -m_1 - \lambda & \theta \\ 0 & \gamma & \sigma & -m_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-\mu - \lambda) \begin{vmatrix} \beta(N)N - m_0 - \lambda & \beta(N)N & 0 \\ \pi & -m_1 - \lambda & \theta \\ \gamma & \sigma & -m_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Nilai eigen  $\lambda_1 = -\mu$ , sedangkan  $\lambda_2, \lambda_3$ , dan  $\lambda_4$  diperoleh dengan menyelesaikan (3.16)

$$\begin{vmatrix} \beta(N)N - m_0 - \lambda & \beta(N)N & 0 \\ \pi & -m_1 - \lambda & \theta \\ \gamma & \sigma & -m_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.16)$$

Dari (3.16) diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^3 + \lambda^2 A_1 + \lambda A_2 + A_3 = 0,$$

dengan

$$A_1 = (m_0 + m_1 + m_2 - \beta(N)N),$$

$$A_2 = (m_0 m_1 + m_0 m_2 - \beta(N)N + m_1 m_2 - \sigma \theta - \beta(N)N m_1 - \beta(N)N m_2),$$

$$A_3 = (-\beta(N)N m_1 m_2 - \beta(N)N m_1 \pi + \beta(N)N \sigma \theta - \beta(N)N \gamma \theta + m_0 m_1 m_2 - m_0 \sigma \theta).$$

Tidak mudah untuk menentukan nilai akar-akar persamaan karakteristik (3.16). Oleh karena itu, sifat kestabilan titik kesetimbangan  $D_0$  diperoleh

menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*. Akibatnya, titik kesetimbangan endemik pecandu bersifat asimtotik lokal jika dan hanya jika

1.  $A_1 > 0$ ,
2.  $A_3 > 0$ ,
3.  $A_1 A_2 - A_3 > 0$ .

### 3.4.2 Analisis Kestabilan Lokal Endemik Pecandu

Matriks Jacobi di titik kesetimbangan  $D_* = (x^*, y^*, z^*, w^*)$  adalah

$$J(D_*) = \begin{bmatrix} -\mu - \beta(N)N(y^* + z^*) & -\beta(N)Nx^* & -\beta(N)N & 0 \\ \beta(N)N(y^* + z^*) & \beta(N)N - m_0 & \beta(N)N & 0 \\ 0 & \pi & -m_1 & \theta \\ 0 & \gamma & \sigma & -m_2 \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik matriks  $J(D_*)$  adalah

$$|J(D_*) - \lambda I| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -\mu - \beta(N)N(y^* + z^*) - \lambda & -\beta(N)Nx^* & -\beta(N)N & 0 \\ \beta(N)N(y^* + z^*) & \beta(N)N - m_0 - \lambda & \beta(N)N & 0 \\ 0 & \pi & -m_1 - \lambda & \theta \\ 0 & \gamma & \sigma & -m_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.17)$$

Dari sistem (3.17) diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^4 + \lambda^3 A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda A_3 + A_4 = 0,$$

dengan

$$A_1 = (-\beta(N)Nx^* + \beta(N)Ny^* + \beta(N)Nz^* + \mu + m_1 + m_2 + m_3),$$

$$A_2 = (-\beta(N)Nx^*\mu - \beta(N)Nx^*m_1 + \beta(N)Ny^*m_1 + \beta(N)Nz^*m_1 - \beta(N)Nx^*m_2 + \beta(N)Ny^*m_2 + \beta(N)Nz^*m_2 + \beta(N)Ny^*m_0 + \beta(N)Nz^*m_0 - \beta(N)N\pi x^* + \mu m_1 + \mu m_2 + \mu m_0 + m_1 m_2 + m_1 m_0 + m_2 m_0 - \sigma \theta),$$

$$A_3 = (\mu m_1 m_2 + \mu m_1 m_0 + \mu m_0 m_2 - \mu \sigma \theta + m_0 m_1 m_2 + m_0 \sigma \theta - \beta(N)N\mu m_1 x^* - \beta(N)N\mu m_2 x^* - \beta(N)N\mu \pi x^* - \beta(N)Nm_1 m_2 x^* + \beta(N)Nm_1 m_2 y^* + \beta(N)Nm_1 m_2 z^* + \beta(N)Nm_1 m_0 y^* + \beta(N)Nm_1 m_0 z^* - \beta(N)Nm_2 m_0 y^* + \beta(N)Nm_2 m_0 z^* - \beta(N)Nm_1 m_0 \pi x^* + \beta(N)N\sigma \theta x^* - \beta(N)N\sigma \theta y^* - \beta(N)N\sigma \theta z^* - \beta(N)N\gamma \theta x^*),$$

$$A_4 = (\mu m_0 m_1 m_2 + \mu m_0 \sigma \theta - \beta(N)N\mu m_1 m_2 x^* - \beta(N)N\mu \pi m_2 x^* + \beta(N)N\mu \sigma \theta x^* + \beta(N)Nm_0 m_1 m_2 y^* + \beta(N)Nm_0 m_1 m_2 z^* - \beta(N)Nm_0 \sigma \theta y^* - \beta(N)Nm_0 \sigma \theta z^* - \beta(N)N\mu \gamma \theta x^*).$$

Tidak mudah untuk menentukan nilai akar-akar persamaan karakteristik (3.17). Oleh karena itu, sifat kestabilan titik kesetimbangan  $D_*$  diperoleh menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*. Akibatnya, titik kesetimbangan endemik pecandu bersifat asimtotik lokal jika dan hanya jika

1.  $A_1 > 0$ , dan  $A_4 > 0$ ,
2.  $A_1 A_2 - A_3 > 0$ ,
3.  $A_1 A_2 A_3 - A_3^2 - A_1^2 A_4 > 0$ .

### 3.4.3 Analisis Kestabilan Global Bebas Pecandu

Didefinisikan fungsi Lyapunov sebagai berikut

$$L = y + \frac{\beta(N)Nm_2}{m_1m_2 - \theta\sigma}z + \frac{\beta(N)N\theta}{m_1m_2 - \theta\sigma}w,$$

pada daerah  $\Omega = \{x, y, z, w | x, y, z, w \geq 0, x + y + z + w = N\}$ ,

i. Akan dibuktikan  $L(D_0) = 0$

$$D_0 = (1, 0, 0, 0),$$

$$L(1, 0, 0, 0) = 0 + \frac{\beta(N)Nm_2}{m_1m_2 - \theta\sigma}0 + \frac{\beta(N)N\theta}{m_1m_2 - \theta\sigma}0,$$

$$L(1, 0, 0, 0) = 0 \text{ (Terbukti).}$$

ii.  $L(x, y, z, w) > 0$  pada daerah  $\Omega$

Diketahui:  $m_1 = \sigma + \mu$ ,  $m_2 = \mu + \theta$ ,

$$\begin{aligned} m_1 \cdot m_2 - \theta\sigma &= \mu^2 + \mu\sigma + \sigma\theta + \mu\theta - \theta\sigma, \\ &= \mu^2 + \mu\sigma + \mu\theta > 0, \end{aligned}$$

Karena semua parameter bernilai positif maka jelas bahwa  $L(x, y, z, w) > 0$ .

iii. Akan dibuktikan  $L' \leq 0$

$$L' = \frac{dy}{dt} + \frac{\beta(N)Nm_2}{m_1m_2 - \theta\sigma} \frac{dz}{dt} + \frac{\beta(N)N\theta}{m_1m_2 - \theta\sigma} \frac{dw}{dt},$$

$$L' = \beta(N)Nx(y + z) - m_0y$$

$$+ \frac{\beta(N)Nm_2}{m_1m_2 - \theta\sigma} (\pi y + \theta w - m_1 z)$$

$$+ \frac{\beta(N)N\theta}{m_1m_2 - \theta\sigma} (\gamma y + \sigma z - m_2 w),$$

karena  $0 < x < 1$ , akibatnya  $\beta(N)Nx(y + z) \leq \beta(N)N(y + z)$  sehingga

$$L' = \frac{dy}{dt} + \frac{\beta(N)Nm_2}{m_1m_2 - \theta\sigma} \frac{dz}{dt} + \frac{\beta(N)N\theta}{m_1m_2 - \theta\sigma} \frac{dw}{dt},$$

$$\begin{aligned}
 L' &= \beta(N)Nx(y+z) - m_0y + \frac{\beta(N)Nm_2}{m_1m_2 - \theta\sigma}(\pi y + \theta w - m_1z) \\
 &\quad + \frac{\beta(N)N\theta}{m_1m_2 - \theta\sigma}(\gamma y + \sigma z - m_2w), \\
 &\leq \beta(N)N(y+z) - m_0y + \frac{\beta(N)Nm_2}{m_1m_2 - \theta\sigma}(\pi y + \theta w - m_1z) \\
 &\quad + \frac{\beta(N)N\theta}{m_1m_2 - \theta\sigma}(\gamma y + \sigma z - m_2w), \\
 &= \left( \beta(N)N - m_0 + \frac{\beta(N)N(m_2\pi + \gamma\theta)}{m_1m_2 - \theta\sigma} \right) y, \\
 &= m_0(R_0 - 1)y.
 \end{aligned}$$

Untuk uraian perhitungan lebih detail bisa dilihat pada Lampiran 2. Jika  $R_0 < 1$  maka  $L' < 0$ , jadi fungsi Lyapunov  $L(D_0)$  memenuhi Definisi 2.1.5.2. Dengan demikian  $L(D_0)$  merupakan fungsi Lyapunov kuat dan titik kesetimbangan bebas pecandu  $D_0$  bersifat stabil asimtotik global, dengan syarat jika  $R_0 < 1$ .

### 3.4.4 Analisis Kestabilan Global Endemik Pecandu

Didefinisikan fungsi Lyapunov

$$\begin{aligned}
 V(D_*) &= \left( x - x^* - x^* \ln \frac{x}{x^*} \right) + \left( y - y^* - y^* \ln \frac{y}{y^*} \right) \\
 &\quad + \frac{\beta(N)Nm_2}{m_1m_2 - \theta\sigma} \left( z - z^* - z^* \ln \frac{z}{z^*} \right) \\
 &\quad + \frac{\beta(N)N\theta}{m_1m_2 - \theta\sigma} \left( w - w^* - w^* \ln \frac{w}{w^*} \right),
 \end{aligned}$$

pada daerah  $\Omega = \{x, y, z, w | x, y, z, w \geq 0, x + y + z + w = N\}$ .

1. Perlu dibuktikan bahwa fungsi  $V(D_*)$  memenuhi kondisi 1 pada Definisi

$$\begin{aligned}
 2.1.5.1. \quad &\text{Jelas bahwa } \left( x^* - x^* - x^* \ln \frac{x^*}{x^*} \right) + \left( y^* - y^* - y^* \ln \frac{y^*}{y^*} \right) \\
 &+ \frac{\beta(N)Nm_2}{m_1m_2 - \theta\sigma} \left( z^* - z^* - z^* \ln \frac{z^*}{z^*} \right) + \frac{\beta(N)N\theta}{m_1m_2 - \theta\sigma} \left( w^* - w^* - w^* \ln \frac{w^*}{w^*} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

2. Selanjutnya akan diperiksa apakah  $V(D_*) > 0$ .

Diketahui

$$V(D_*) = \left( x - x^* - x^* \ln \frac{x}{x^*} \right) + \left( y - y^* - y^* \ln \frac{y}{y^*} \right)$$

$$+ \frac{\beta(N)Nm_2}{m_1m_2 - \theta\sigma} \left( z - z^* - z^* \ln \frac{z}{z^*} \right) \\ + \frac{\beta(N)N\theta}{m_1m_2 - \theta\sigma} \left( w - w^* - w^* \ln \frac{w}{w^*} \right).$$

Misalkan  $f(x) = (x - x^* - x^* \ln \frac{x}{x^*})$  dan  $f(x)$  terdefinisi pada domain  $x \in \mathbb{R}^+$  sehingga turunan pertama  $f(x)$  terhadap  $x$  dapat dinyatakan sebagai berikut

$$f'(x) = \left( 1 - \frac{x^*}{x} \right), x \in (0, \infty).$$

Titik stasioner diperoleh ketika  $f'(x) = 0$ . Nilai  $x$  yang memenuhi  $f'(x^*) = 0$  adalah  $x = x^*$ . Jika  $x \in (0, x^*)$ , maka berlaku  $f'(x^*) < 0$ . Di lain pihak, jika  $x \in (x^*, \infty)$  maka berlaku  $f'(x^*) > 0$ . Oleh karena itu  $f(x)$  monoton turun pada selang  $(0, x^*)$ , dan monoton naik pada selang  $(x^*, \infty)$ . Berdasarkan uraian tersebut jelas bahwa  $(x^*, 0)$  merupakan titik minimum  $f(x)$ . Karena  $x^* = 0$  merupakan nilai minimum  $f(x)$  pasti berlaku  $f(x) > 0, \forall x \neq x^* \in \Omega$ . Hal ini juga berlaku untuk membuktikan  $f(y) = y - y^* - y^* \ln \frac{y}{y^*}$ ,  $f(z) = z - z^* - z^* \ln \frac{z}{z^*}$ , dan  $f(w) = w - w^* - w^* \ln \frac{w}{w^*}$ . Jadi terbukti bahwa  $V(D_*) > 0$ .

3. Akan dibuktikan  $V' < 0$ .

Turunan fungsi Lyapunov  $V$  adalah sebagai berikut

$$V' = \left( x' - \frac{x^*}{x} x' \right) + \left( y' - \frac{y^*}{y} y' \right) + \frac{\beta(N)Nm_2x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \left( z' - \frac{z^*}{z} z' \right) \\ + \frac{\beta(N)N\theta x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \left( w' - \frac{w^*}{w} w' \right), \\ V' = \left( 1 - \frac{x^*}{x} \right) x' + \left( 1 - \frac{y^*}{y} \right) y' + \frac{\beta(N)Nm_2x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \left( 1 - \frac{z^*}{z} \right) z' \\ + \frac{\beta(N)N\theta x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \left( 1 - \frac{w^*}{w} \right) w', \\ V' = \left( 1 - \frac{x^*}{x} \right) (\mu - \mu x - \beta(N)Nx(y + z)) \\ + \left( 1 - \frac{y^*}{y} \right) (\beta(N)Nx(y + z) - m_0y)$$



$$+ \frac{\beta(N)Nm_2x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \left(1 - \frac{z^*}{z}\right) (\pi y + \theta w - m_1 z) \\ + \frac{\beta(N)N\theta x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \left(1 - \frac{w^*}{w}\right) (\gamma y + \sigma z - m_2 w).$$

Dengan kondisi setimbang seperti pada sistem (3.8), dapat dibentuk

- $\mu = \mu x^* \beta(N)Nx^*(y^* + z^*),$
- $m_0 = \frac{\beta(N)Nx^*(y^* + z^*)}{y^*},$
- $m_1 = \frac{\pi y^* + \theta w^*}{z^*},$
- $m_2 = \frac{\gamma y^* + \sigma z^*}{w^*}.$

Kemudian dimisalkan  $\frac{x}{x^*} = a, \frac{y}{y^*} = b, \frac{z}{z^*} = c,$  dan  $\frac{w}{w^*} = e,$  sehingga diperoleh

$$V' = \left(1 - \frac{1}{a}\right) (\mu x^* - \beta(N)Nx^*(y^* + z^*)) - \mu a x^* \\ - \beta(N)Na x^*(yb^* + z^*c) \\ + \left(1 - \frac{1}{b}\right) (\beta(N)Na x^*(y^*b + z^*c) - \beta(N)Nb x^*(y^* + z^*)) \\ + \frac{\beta(N)Nm_2x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \left(1 - \frac{1}{c}\right) (\pi y^*b + \theta w^*e - (\pi y^*c + \theta w^*c)) \\ + \frac{\beta(N)N\theta x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \left(1 - \frac{1}{e}\right) (\gamma y^*b + \sigma z^*c - (\gamma y^*e + \sigma z^*e)),$$

$$V' = -\frac{\mu}{x}(x-x^*)^2 + \beta(N)Nx^*y^* \left[ \left(1 - \frac{1}{a}\right)(1-ab) + \left(1 - \frac{1}{b}\right)(ab-b) \right] \\ + \beta(N)Nx^*z^* \left[ \left(1 - \frac{1}{a}\right)(1-ac) + \left(1 - \frac{1}{b}\right)(ac-b) \right] \\ + \frac{\beta(N)Nm_2x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \left(1 - \frac{1}{c}\right) (\pi y^*(b-c) + \theta w^*(e-c)) \\ + \frac{\beta(N)N\theta x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \left(1 - \frac{1}{e}\right) (\gamma y^*(b-e) + \sigma z^*(c-e)),$$

$$V' = -\frac{\mu}{x}(x-x^*)^2 + 2\beta(N)Nx^*y^* - a\beta(N)Nx^*y^* - \frac{1}{a}\beta(N)Nx^*y^* \\ + 2\beta(N)Nx^*z^* - \frac{1}{a}\beta(N)Nx^*z^* - b\beta(N)Nx^*z^* + c\beta(N)Nx^*z^* \\ - \frac{ac}{b}\beta(N)Nx^*z^* + b\frac{\beta(N)Nm_2x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma}\pi y^* - \frac{b}{c}\frac{\beta(N)Nm_2x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma}\pi y^* \\ - c\frac{\beta(N)Nm_2x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma}\pi y^* + \frac{\beta(N)Nm_2x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma}\pi y^* + e\frac{\beta(N)Nm_2x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma}\theta w^*$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{e}{c} \frac{\beta(N)Nm_2x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \theta w^* - c \frac{\beta(N)Nm_2x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \theta w^* + \frac{\beta(N)Nm_2x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \theta w^* \\
 & + b \frac{\beta(N)N\theta x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \gamma y^* - \frac{b}{e} \frac{\beta(N)N\theta x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \gamma y^* - e \frac{\beta(N)N\theta x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \gamma y^* \\
 & + \frac{\beta(N)N\theta x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \gamma y^* + c \frac{\beta(N)N\theta x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \sigma z^* - \frac{c}{e} \frac{\beta(N)N\theta x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \sigma z^* \\
 & - e \frac{\beta(N)N\theta x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \sigma z^* + \frac{\beta(N)N\theta x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \sigma z^*,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V' = & -\frac{\mu}{x}(x-x^*)^2 + \beta(N)Nx^*y^* \left(2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)\right) \\
 & + \frac{\beta(N)Nm_2x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \pi y^* \left(3 - \left(\frac{ac}{b} + \frac{1}{a} + \frac{b}{c}\right)\right) \\
 & + \frac{\beta(N)N\theta x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \gamma y^* \left(4 - \left(\frac{b}{e} + \frac{ac}{b} + \frac{e}{c} + \frac{1}{a}\right)\right) \\
 & + \frac{\beta(N)N\theta x^*}{m_1m_2 - \theta\sigma} \sigma z^* \left(2 - \left(\frac{e}{c} + \frac{c}{e}\right)\right).
 \end{aligned}$$

Untuk perhitungan detail bisa dilihat di Lampiran 3.  $V' < 0$  jika  $\left(2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)\right) \leq 0$ ,  $\left(3 - \left(\frac{ac}{b} + \frac{1}{a} + \frac{b}{c}\right)\right) \leq 0$ ,  $\left(2 - \left(\frac{e}{c} + \frac{c}{e}\right)\right) \leq 0$ , dan  $\left(4 - \left(\frac{b}{e} + \frac{ac}{b} + \frac{e}{c} + \frac{1}{a}\right)\right) \leq 0$ . Dengan menggunakan Ketaksamaan Rata-Rata Aritmetika dan Geometri dibuktikan  $\left(3 - \left(\frac{ac}{b} + \frac{1}{a} + \frac{b}{c}\right)\right) \leq 0$ ,  $\left(2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)\right) \leq 0$ ,  $\left(2 - \left(\frac{e}{c} + \frac{c}{e}\right)\right) \leq 0$ , dan  $\left(4 - \left(\frac{b}{e} + \frac{ac}{b} + \frac{e}{c} + \frac{1}{a}\right)\right) \leq 0$  sebagai berikut

$$\frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} \geq (c_1 \cdot c_2 \dots c_n)^{\frac{1}{n}},$$

$$\frac{\left(a + \frac{1}{a}\right)}{2} \geq \sqrt[2]{\left(a \cdot \frac{1}{a}\right)},$$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 2,$$

sehingga terbukti  $\left(2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)\right) \leq 0$ , berlaku juga untuk  $\left(2 - \left(\frac{e}{c} + \frac{c}{e}\right)\right)$ .

Kemudian dibuktikan  $\left(3 - \left(\frac{ac}{b} + \frac{1}{a} + \frac{b}{c}\right)\right) \leq 0$

$$\frac{\left(\frac{ac}{b} + \frac{1}{a} + \frac{b}{c}\right)}{3} \geq \sqrt[3]{\left(\frac{ac}{b} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{c}\right)},$$

$$\left(\frac{ac}{b} + \frac{1}{a} + \frac{b}{c}\right) \geq 3,$$

sehingga terbukti  $\left(3 - \left(\frac{ac}{b} + \frac{1}{a} + \frac{b}{c}\right)\right) \leq 0$ .

Kemudian dibuktikan  $\left(4 - \left(\frac{b}{e} + \frac{ac}{b} + \frac{e}{c} + \frac{1}{a}\right)\right) \leq 0$

$$\frac{\left(\frac{b}{e} + \frac{ac}{b} + \frac{e}{c} + \frac{1}{a}\right)}{4} \geq \sqrt[4]{\left(\frac{b}{e} \cdot \frac{ac}{b} \cdot \frac{e}{c} \cdot \frac{1}{a}\right)},$$

$$\left(\frac{b}{e} + \frac{ac}{b} + \frac{e}{c} + \frac{1}{a}\right) \geq 4,$$

sehingga terbukti  $\left(4 - \left(\frac{b}{e} + \frac{ac}{b} + \frac{e}{c} + \frac{1}{a}\right)\right) \leq 0$ .

Berdasarkan perhitungan di atas terbukti  $V'(D_*) < 0$ . Fungsi Lyapunov  $V(D_*)$  memenuhi Definisi 2.1.5.2, dengan demikian  $V(D_*)$  merupakan fungsi Lyapunov kuat dan titik kesetimbangan endemik pecandu  $D_*$  bersifat stabil asimtotik global.

Syarat eksistensi dan jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan (3.6) dirangkum pada Tabel (3.1).

Tabel 3.1: Titik kesetimbangan, syarat eksistensi, dan kestabilan

Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
$D_0$	Tidak Ada	Stabil Asimtotik Global	$R_0 < 1$
$D_*$	$R_0 > 1$	Stabil Asimtotik Global	Tidak Ada

### 3.5 Simulasi Numerik dan Interpretasi Hasil Analisis

Pada subbab ini ditunjukkan simulasi numerik solusi sistem (3.7) untuk mengilustrasikan hasil analisis pada subbab sebelumnya. Simulasi dilakukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat pada software Matlab. Berdasarkan Tabel (3.1) terdapat dua titik kesetimbangan dengan syarat kestabilan tertentu. Untuk memperlihatkan kestabilan semua titik kesetimbangan beberapa nilai parameter diambil tetap untuk semua simulasi, sedangkan nilai parameter  $\beta(N)$  diubah-ubah sehingga memenuhi dua kondisi yang berbeda sesuai Tabel (3.1). Beberapa nilai parameter yang tetap disajikan dalam Tabel (3.2) sebagai berikut

Tabel 3.2: Nilai parameter

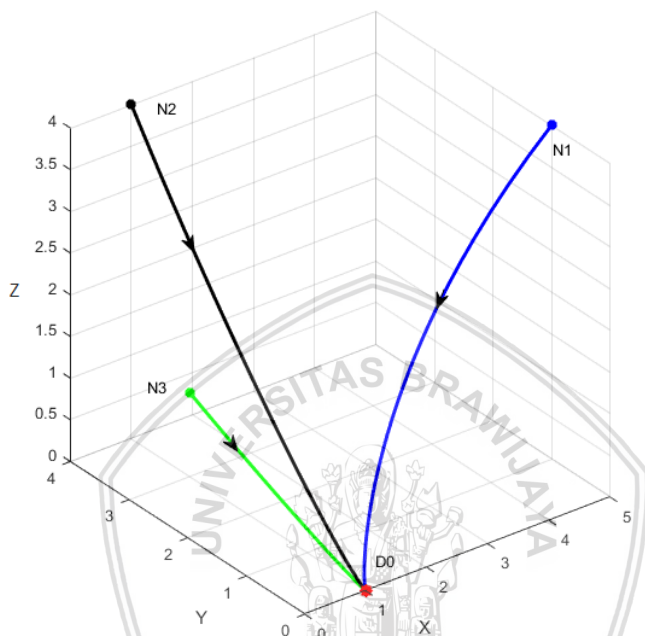
Parameter	Nilai
$\pi$	0.03
$\sigma$	0.00210
$\gamma$	0.0095
$\theta$	0.000011
$N$	54

Hasil simulasi ditunjukkan dengan potret fase pada ruang  $x, y, z$  dengan beberapa nilai awal yang berbeda. Garis-garis orbit akan menuju ke titik kesetimbangan berdasarkan syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan sesuai Tabel (3.1).

#### 3.5.1 Simulasi I

Pada simulasi ini diambil tingkat kejadian berbentuk  $\beta(N) = \beta$  dengan nilai parameter  $\beta = 0.0008$  dan  $\beta = 0.08$ , serta parameter  $\mu = 0,8$ . Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 3.2 untuk  $\beta = 0.0008$  diperoleh  $R_0 < 1$  dan hanya titik  $D_0 = (1,0,0,0)$  yang eksis. Nilai parameter tersebut digunakan pula untuk menentukan kestabilan lokal titik  $D_0$  yang harus memenuhi kriteria Routh Hurwitz, sehingga diperoleh  $A_1 = 2.398411 > 0$ ,  $A_3 = 0.4024018519 > 0$ , dan  $A_1 A_2 - A_3 = 3.870926141 > 0$ . Hal ini menyebabkan kriteria Routh Hurwitz terpenuhi, jadi titik kestabilan bebas pecandu bersifat stabil asimtotik lokal.

Perilaku solusi dengan tiga nilai awal yang berbeda, yaitu  $N_1 = (5,1,4,1)$ ,  $N_2 = (1,4,4,2)$ , dan  $N_3 = (1,3,1,5)$  dapat dilihat pada Gambar 3.2

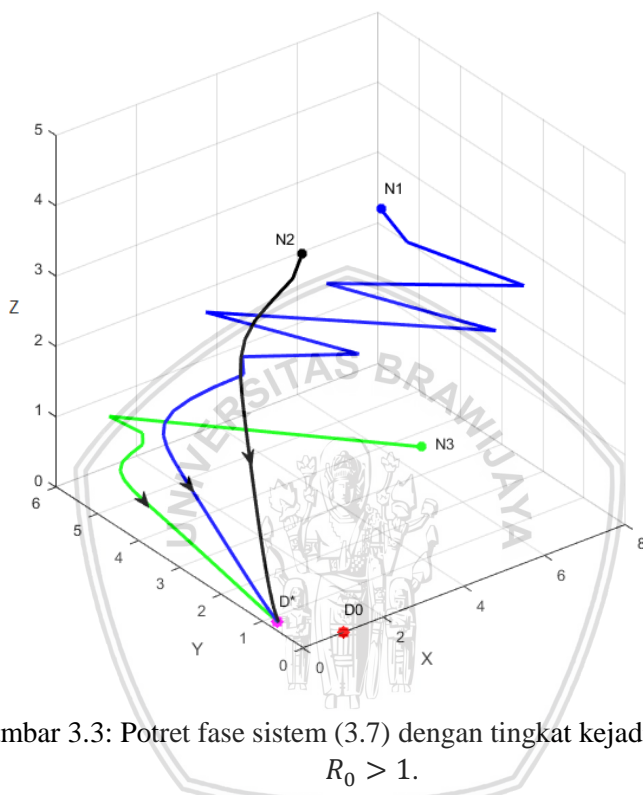


Gambar 3.2: Potret fase sistem (3.7) dengan tingkat kejadian  $\beta$  untuk  $R_0 < 1$ .

Gambar 3.2 menunjukkan bahwa dengan beberapa nilai awal yang diberikan, orbit-orbit menuju ke titik kesetimbangan  $D_0$ . Hal ini sesuai hasil perhitungan analisis titik kesetimbangan  $D_0$  yang bersifat stabil asimtotik global jika  $R_0 < 1$ .

Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 3.2 untuk  $\beta = 0.08$  diperoleh  $R_0 > 1$ , serta titik  $D_0 = (1,0,0,0)$  pada simulasi ini tidak stabil dan titik  $D_* = (0.1875, 0.8273, 0.0306, 0.094)$  eksis. Nilai parameter tersebut digunakan pula untuk menentukan kestabilan lokal titik  $D_*$  yang harus memenuhi kriteria Routh Hurwitz, sehingga diperoleh  $A_1 = 5.013327703 > 0$ ,  $A_4 = 0.315901184 > 0$ ,  $A_1A_2 - A_3 = 29.81830133 > 0$  dan  $A_1A_2A_3 - A_3A_3 - A_1A_1A_4 = 88.76413880 > 0$ . Hal ini menyebabkan kriteria Routh Hurwitz terpenuhi, jadi titik kestabilan

endemik pecandu bersifat stabil asimtotik lokal. Perilaku solusi dengan tiga nilai awal yang berbeda, yaitu  $N_1 = (5,3,4,2)$ ,  $N_2 = (1,1,5,3)$ , dan  $N_3 = (5,2,1,6)$ , dapat dilihat pada Gambar 3.3



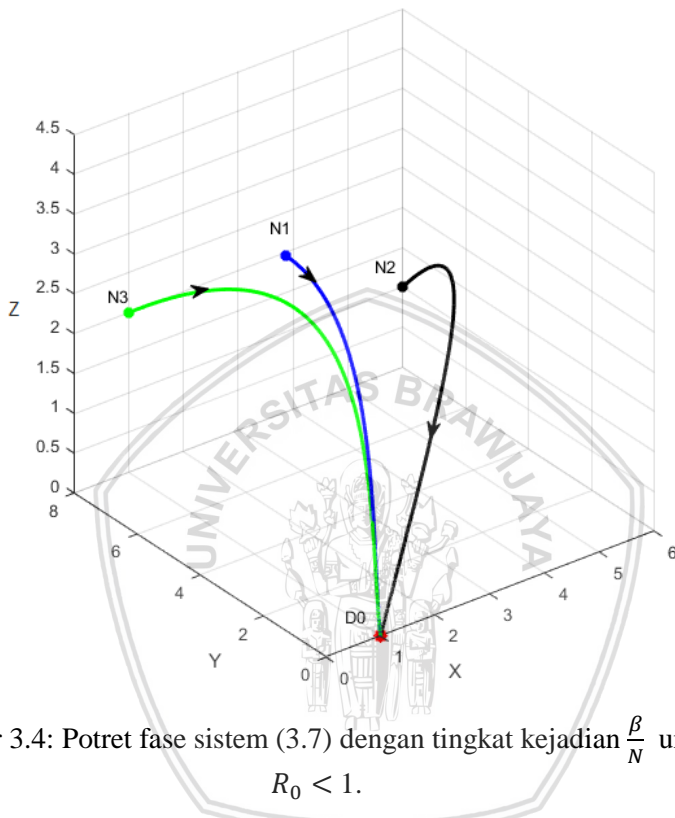
Gambar 3.3: Potret fase sistem (3.7) dengan tingkat kejadian  $\beta$  untuk  $R_0 > 1$ .

Gambar 3.3 menunjukkan bahwa dengan beberapa nilai awal yang diberikan, orbit-orbit menuju ke titik kesetimbangan  $D_*$ . Hal ini sesuai hasil perhitungan analisis titik kesetimbangan  $D_*$  yang bersifat stabil asimtotik global jika  $R_0 > 1$ .

### 3.5.2 Simulasi II

Pada simulasi ini diambil tingkat kejadian umum berbentuk  $\beta(N) = \frac{\beta}{N}$  dengan nilai parameter  $\beta = 0.0008$  dan  $\beta = 0.08$ , serta parameter  $\mu = 0,03$ . Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 3.2 untuk  $\beta = 0.0008$  diperoleh  $R_0 < 1$  dan hanya titik  $D_0 = (1,0,0,0)$  yang eksis.

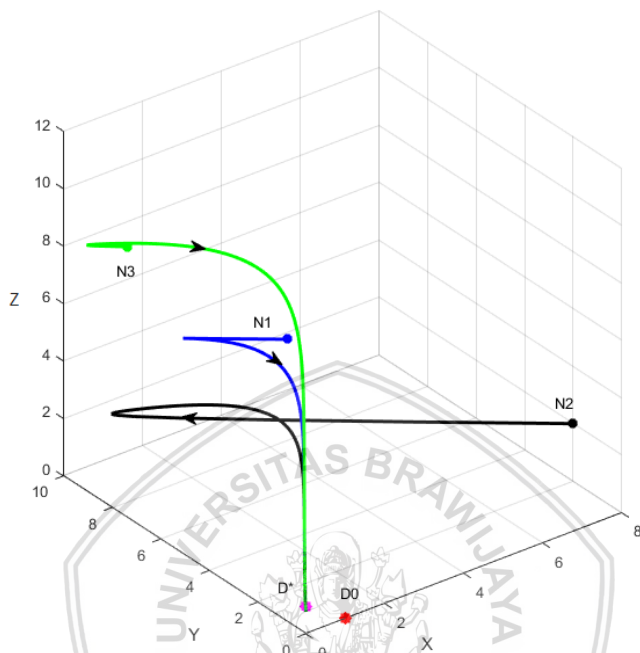
Perilaku solusi dengan tiga nilai awal yang berbeda, yaitu  $N_1 = (1,3,4,3)$ ,  $N_2 = (6,8,1,3)$ , dan  $N_3 = (1,8,2,7)$  dapat dilihat pada Gambar 3.4



Gambar 3.4: Potret fase sistem (3.7) dengan tingkat kejadian  $\frac{\beta}{N}$  untuk  $R_0 < 1$ .

Gambar 3.4 menunjukkan bahwa dengan beberapa nilai awal yang diberikan, orbit-orbit menuju ke titik kesetimbangan  $D_0$ . Hal ini sesuai hasil perhitungan analisis titik kesetimbangan  $D_0$  yang bersifat stabil asimtotik global jika  $R_0 < 1$ .

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 3.1 untuk  $\beta = 0.08$  diperoleh  $R_0 > 1$ , serta titik  $D_0 = (1,0,0,0)$  pada simulasi ini tidak stabil dan titik  $D_* = (0.077, 0.1403, 0.8275, 0.0198)$  eksis. Perilaku solusi dengan tiga nilai awal yang berbeda, yaitu  $N_1 = (2,4,7,1)$ ,  $N_2 = (8,2,2,1)$ , dan  $N_3 = (1,9,9,8)$  dapat dilihat pada Gambar 3.5



Gambar 3.5: Potret fase sistem (3.7) dengan tingkat kejadian  $\frac{\beta}{N}$  untuk  $R_0 > 1$ .

Gambar 3.5 menunjukkan bahwa dengan beberapa nilai awal yang diberikan, orbit-orbit menuju ke titik kesetimbangan  $D_*$ . Hal ini sesuai hasil perhitungan analisis titik kesetimbangan  $D_*$  yang bersifat stabil asimtotik global jika  $R_0 > 1$ .





## BAB IV

### KESIMPULAN

Berdasarkan tujuan pembahasan skripsi ini dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Model penyebaran pecandu narkoba sintetis berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear yang terdiri dari empat kompartemen yaitu rentan ( $S$ ), pecandu psikologis ( $P$ ), pecandu fisiologis ( $H$ ), dan pecandu dalam rehabilitasi ( $T$ ).
2. Model penyebaran pecandu narkoba sintetis memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas pecandu dan endemik pecandu. Eksistensi titik kesetimbangan ditentukan oleh angka reproduksi dasar ( $R_0$ ). Jika  $R_0 < 1$  maka hanya terdapat satu titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan bebas pecandu. Jika  $R_0 > 1$  maka terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis yaitu titik kesetimbangan bebas pecandu dan endemik pecandu. Selanjutnya berdasarkan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan, kestabilan titik kesetimbangan bebas pecandu bersifat stabil asimtotik global dengan syarat  $R_0 < 1$ , sedangkan kestabilan titik kesetimbangan endemik pecandu bersifat stabil asimtotik global.
3. Simulasi numerik yang dilakukan terhadap dua bentuk tingkat kejadian umum menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis.



## DAFTAR PUSTAKA

- Alligood, K. T., T. D. Sauer, dan J. A. Yorke. 2000. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer. New York.
- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Ninth Edition. John Wiley Sons Inc. United State of America.
- Brauer, F. dan C.C. Chavez. 2010. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Second Edition. Springer-Verlag. New York.
- Fang, B. X., Li, M. Martcheva, dan L. Cai. 2014. Global stability for a heroin model with two distributed delays, *Discrete Contin. Dynamical Systems Series. B*19:715-733.
- Driessche, P. V. D. dan J. Watmough. 2002. Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission, *Mathematical Biosciences*. vol. 180. hal. 29-48.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Alih bahasa oleh Widiarti Santoso. Erlangga. Jakarta.
- Ma, M., S. Liu, H. Xiang, dan J. Li. 2017. Dynamics of synthetic drugs transmission model with psychological addicts and general incidence rate. *Physica A*.08:128
- Mulone, G. dan B. Straughan. 2009. A note on heroin epidemics, *Mathematical Biosciences*.218:138-141.
- Murray, J. D. 2002. *Mathematical Biology : An Introduction*. Third Edition. Springer-Verlag. New York.
- Mushanyu, J., F. Nyabadza, dan A. G. R. Stewart. 2015. *Modelling the trends of inpatient and outpatient rehabilitation for*

*methamphetamine in the Western Cape province of South Africa*, BMC research notes 8:1-13.

Nagle, R. K., E. B. Saff, dan A. D. Snider. 2012. *Fundamentals of Differential Equations*. Eighth Edition. Pearson Education, Inc. Boston.

Nyabadza, F., J. B. H. Njagarah, dan R. J. Smith. 2013. Modelling the dynamics of crystal meth abuse in the presence of drug-supply chain in South Africa, B. *Mathematical Biologi*. 75:24-48.

Samanta, G. P. 2011. Dynamic behaviour for a nonautonomous heroin epidemic model with time delay, J. *Application Mathematics Computation*. 35:161-178.

Watmough, J. dan P.V.D. Driessche. 2001. *Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission*. Department of Mathematics and Statistics, University of New Brunswick. Canada.

White, E. dan C. Comiskey. 2007. Heroin epidemics, treatment and ODE modelling, *Mathematical Biosciences*. 208:312-324.

